

ESTIMATION 3D JOINTE DES VOLUMES ET DES VITESSES POUR LA TOMOGRAPHIE PIV

Ioana BARBU *, Cédric HERZET, Etienne MEMIN

Fluminance, INRIA Centre Rennes - Bretagne Atlantique, Rennes

* ioana.barbu@inria.fr

Résumé

Nous proposons une nouvelle formulation du problème joint d'estimation inhérent à la Tomographie PIV. En effet, l'approche classique dans la littérature suit un paradigme séquentiel selon lequel les champs de déplacement sont estimés à partir de deux distributions d'intensité volumiques évaluées préalablement. Nous abordons la question, dans une première partie, de ladite manière en exprimant le problème d'estimation de mouvement dans un cadre de calcul de flot scénique à partir des distributions volumiques qui résolvent le critère de minimisation de la norme ℓ_0 sur le signal. Ensuite, nous formulons une fonctionnelle innovante de conservation d'intensité par rapport aux distributions volumiques d'intensité, ainsi qu'à la trajectoire du fluide. Cette dernière permet une optimisation des topologies volumiques consécutives des particules en cohérence avec leur déplacement d'une instance à une autre. Nous montrons les performances obtenues dans un scénario synthétique classiquement utilisé dans le contexte de TomoPIV.

Mots Clés : Tomographie PIV/ parcimonie /flot scénique/ estimation jointe.

1. Introduction

Depuis l'émergence de la technique de Tomographie PIV pour l'analyse tridimensionnelle d'écoulement des fluides, de nombreux développements ont été proposés dans le but d'affiner les résultats premiers obtenus par (Elsinga et al. [2006]). Ainsi, nous mentionnons des études d'approfondissement sur la compréhension des particules fantôme (Elsinga et al. [2010]), (Elsinga [2013]), des avancements sur la calibration du système (Wieneke [2008]), et sur des schémas d'accélération par l'initialisation de la distribution volumique à reconstruire (Worth et Nickels [2008]), (Atkinson et Soria 2009)).

Le schéma classique de reconstruction pour la TomoPIV propose l'estimation séquentielle des distributions 3D consécutives d'intensité, ensuite des champs de vitesses qui les relient. Une amélioration de ce dernier, décrite dans (Novara et Scarano [2010]), s'inscrit dans les efforts de la communauté d'aller vers une estimation jointe de ces deux quantités inconnues. En effet, les auteurs rajoutent au paradigme classique de reconstruction un chemin d'initialisation des distributions volumiques qui prend en considération les deux instants successifs de la scène. La technique, nommée Motion Tracking Advancement (MTE), s'avère être plus performante en terme de qualité du signal estimé tout en respectant la topologie des particules suivies.

Motivés par ces développements, nous proposons dans cet article des alternatives aux schémas classiques et joints déjà présents dans la littérature. A cette fin, nous nous intéressons aux formulations qui prennent en compte les particularités notables propres au système de TomoPIV. Cette étude est organisée comme suit : la section 2 présente l'abstraction mathématique de l'application tomographique à la mécanique des fluides expérimentale. Les sections 3 et 4 introduisent nos propositions pour les paradigmes séquentiels, respectivement joints d'estimation. Dernièrement, l'intérêt de

ces deux techniques est allégué par la reconstruction synthétique présentée de manière qualitative en section 5.

2. Modélisation

Nous posons le cadre mathématique du scénario décrit ci-dessus. Pour ceci, nous nous intéressons d'abord au modèle qui relie le signal physique continu aux observations. Ensuite, nous présentons leur interaction dans une formulation discrète reliant les images 2D à la densité de particules dans l'espace 3D.

2.1. Modèle continu

Soit \tilde{v}_t la fonction d'intensité volumique au temps t définie aux centres des particules passives suspendues dans le fluide. Nous exprimons leurs coordonnées spatiales dans le repère attaché au volume observé, défini de manière à ce que l'axe Z soit opposé au vecteur caractérisé par l'axe optique d'une caméra. La fonction d'intensité peut s'exprimer suivant une relation de proportionnalité entre la lumière éendue par une particule et ses propriétés géométriques, à noter son diamètre d et sa position en profondeur. Nous prenons en compte dans le modèle le profil gaussien d'intensité du faisceau d'éclairage des particules, qui varie également dans la direction de l'axe optique avec une déviation standard $\sigma_L \in \mathbb{R}^+$. L'intensité d'une particule située à une position $\mathbf{m}^j = [m_x^j \ m_y^j \ m_z^j]^T \in \mathbb{R}^3$ écrit :

$$\tilde{v}_t^j \propto d \exp \left\{ -\frac{(m_z^j)^2}{2\sigma_L^2} \right\}. \quad (1)$$

Suivant (Adrian et Westerweel [2010]), une particule dans l'espace a des dimensions physiques négligeables. Toutefois, suivant les propriétés du système de visualisation, sa projection sur l'image impacte un agrégat de pixels dont l'intensité varie selon une fonction de répartition évanescence sur les deux dimensions. Afin d'approximer la formation des images, nous modélisons la fonction d'intensité 3D comme une somme de fonctions gaussiennes pondérées. La fonction de densité à un instant $t \in \mathbb{N}^+$ peut s'exprimer comme suit :

$$w_t(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^M \tilde{v}_t^j g^j(\mathbf{k}), \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

avec $g^j(\mathbf{k}) = \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{m}^j\|^2}{2\sigma^2} \right\} \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{k} - \mathbf{m}^j\| < \varepsilon\}}$, $\varepsilon, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, où

avec $j = 1, \dots, M$, où M est le nombre de particulesensemencées. Nous exprimons par $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ la fonction indicatrice qui prend 1 si la condition entre accolades est respectée et 0 sinon.

Les particules passives vont suivre le mouvement du fluide et seront, conséquemment, portées par une fonction de déplacement. Nous notons par $u_t(\mathbf{k})$ le déplacement à l'instant $t + 1$ d'un traceur situé à la position $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ à l'instant t . Sous l'hypothèse que fonction de densité est invariable selon la trajectoire de la particule, nous obtenons que :

$$w_{t+1}(\mathbf{k} + u_t(\mathbf{k})) = w_t(\mathbf{k}), \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3. \quad (3)$$

A chaque instant, le signal 3D se projette simultanément sur l'ensemble des plans 2D correspondants à chaque caméra. Chaque pixel i à l'instant t représente l'intégration de la densité d'intensité 3D selon le cône de vue qui a son origine dans le centre optique de la caméra en question et passant par la surface du pixel, comme ci-dessus :

$$y_{i,t} \approx \int_{\Omega_i} w_t(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \forall i, t. \quad (4)$$

2.2. Modèle discret

Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ un cuboïde dans l'espace tridimensionnel. Ce dernier est défini comme une grille cartésienne composée de m voxels $\zeta_j \subset \mathbb{R}^3$ centrés sur \mathbf{k}_j , $j \in \Gamma = \{1, \dots, m\}$. Nous supposons que la densité continue volumique $w_t(\mathbf{k})$ peut être numérisée sur le domaine \mathcal{V} à l'instant t par une fonction polynomiale par morceaux telle que $x_t(\mathbf{k}) \approx w_t(\mathbf{k})$:

$$x_t(\mathbf{k}) = \sum_{j \in \Gamma} p_j(\mathbf{k}) \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_j\|_\infty < \delta/2\}}, \text{Vol}(\zeta_j) = \delta^3. \quad (5)$$

Nous introduisons les notations suivantes : $\mathbf{x}_t \doteq [x_t(\mathbf{k}_1) \dots x_t(\mathbf{k}_m)]^T \doteq [x_1 \dots x_m]^T$, $\forall t \in \mathbb{N}^+$, $\mathbf{u}_t \doteq [u_t(\mathbf{k}_1) \dots u_t(\mathbf{k}_m)]^T$ et $\mathbf{x}_{t+1}(\mathbf{u}_t) \doteq [x_{t+1}(\mathbf{k}_j + u_t(\mathbf{k}_j))]_{j \in \Gamma}^T$.

Il en découle, en utilisant des propriétés algébriques simples, que :

$$\mathbf{x}_{t+1}(\mathbf{u}_t) = I(\mathbf{u}_t)\mathbf{x}_{t+1}, \quad (6)$$

où $I(\mathbf{u}_t)$ est une matrice intrinsèquement dépendante de l'interpolation considérée.

En se reportant à (5) et (6) pour approximer (3), nous exprimons la conservation d'intensité sur \mathcal{V} entre deux instants comme ci-dessus :

$$\mathbf{x}_t = I(\mathbf{u}_t)\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{n}_{e_t}, \quad (7)$$

où $\mathbf{n}_{e_t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{e_t}^2)$ est un bruit gaussien de moyenne zéro et variance $\sigma_{e_t}^2$ qui modélise les changements d'illumination de la scène et les erreurs d'interpolation.

Finalement, nous formalisons le modèle de projection qui relie les distributions 3D discrètes de l'intensité aux observations 2D en joignant (4) et (5). Nous notons par $\mathbf{y}_t = [y_{1,t} \dots y_{n,t}]^T$ le vecteur collectant les intensités des n pixels à chaque instant $t \in \mathbb{N}^+$. L'équation de projection s'écrit : $\mathbf{y}_t = \mathbf{D}\mathbf{x}_t$, où la matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est définie tel que d_{ij} représente le poids de contribution de l'intensité du voxel ζ_j à l'énergie mesurée dans le cône de vue passant par $i^{\text{ème}}$ pixel. Nous prenons en compte les erreurs de mesure en relaxant le modèle comme suit :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{D}\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t, \forall t \in \mathbb{N}^+, \quad (8)$$

où $\mathbf{n}_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$ est un bruit gaussien de moyenne zéro et variance σ_t^2 .

3. Estimation séquentielle

Le schéma classique d'estimation adopté dans la communauté TomoPIV se résume dans la reconstruction de deux distributions 3D successives auxquelles on applique des traitements a posteriori afin d'en déduire les vecteurs de déplacements qui les relient. Nous décrivons, dans cette section, une méthode alternative à l'état de l'art, mais qui suit le même cheminement de reconstruction, et nous expliquons leur pertinence par rapport à l'anatomie intrinsèque du système physique.

3.1. Reconstruction volumique des centres des particules

Comme nous l'avons précisé dans la Section 2, la projection des particules sur les images impacte un amas de pixels adjacents et résulte dans ce que l'on appelle un blob gaussien 2D. Afin de prendre en compte cette interaction, nous avons modélisé les particules dans

l'espace tels des blobs gaussiens 3D. Puisque nous voulons reconstruire uniquement les centres de ces distributions, nous introduisons le dictionnaire $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{G}$, où $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times (p^3 \times m)}$ est créé tel qu'il contient sur la $j^{\text{ème}}$ colonne les coefficients gaussiens de convolution $g^j(\mathbf{k}_i)$ définis dans (2), $\forall \mathbf{k}_i \in \mathbb{R}^3, \forall i \in \Gamma$. Selon la quantité $p \in \mathbb{N}^+$, on cherche les centres des particules avec une précision sousvoxelique dans un espace $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$ de $p^3 \times m$ voxels $\zeta_i \subset \mathbb{R}^3$ centrés sur \mathbf{w}_j , $j \in \Lambda = \{1, \dots, p^3 \times m\}$. Nous définissons $\mathbf{v}_t \doteq [v_t(\mathbf{w}_1) \dots v_t(\mathbf{w}_{p^3 \times m})]^T \doteq [v_t^1 \dots v_t^{p^3 \times m}]^T, \forall t \in \mathbb{N}^+$ le vecteur collectant les intensités des centres des $p^3 \times m$ sousvoxels dans \mathcal{W} où la densité volumique des centres des particules \tilde{v}_t est approximée, de manière analogue à (5), par le biais d'une fonction polynomiale tel que $v_t(\mathbf{w}) = \sum_{j \in \Lambda} p_j(\mathbf{w}) \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_j\|_\infty < \delta/(2p)\}}$. Nous cherchons la solution qui minimise le critère suivant :

$$\mathbf{v}_t^* = \arg \min_{\mathbf{v}_t} \mathcal{H}(\mathbf{v}_t) \text{ sujet à } \begin{cases} c_1: \mathbf{B}\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t \\ c_2: v_t^j \geq 0, \forall j \in \Lambda. \end{cases} \quad (9)$$

Le problème d'optimisation (9) peut prendre plusieurs formes selon la fonction $\mathcal{H}(\mathbf{v}_t)$, que nous allons expliciter ci-dessus. Nous précisons que le signal imagé par un système de TomoPIV cumule les caractéristiques saillantes ; en effet, le système à résoudre est souvent sous-déterminé ($n < p^3 \times m$) et le vecteur \mathbf{v}_t à reconstruire est non-négatif et parcimonieux. Les contraintes c_1 , qui garantit que l'estimation satisfait le modèle souhaité et c_2 , qui assure la non-négativité sur les coefficients v_t^j , sont donc exploitées afin de lever les ambiguïtés propres aux systèmes sous-déterminés.

La technique *MART* (*Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique*), communément utilisée dans la littérature, minimise un critère d'entropie sur le signal recherché tel que $\mathcal{H}(\mathbf{v}_t) = \sum_{j=1}^{p^3 \times m} v_t^j \log v_t^j$ sous (c_1, c_2) (Elsinga et al. [2006]). La solution estimée est donc non-négative, mais dense.

Plus récemment, l'attention de la communauté s'est focalisée sur la recherche d'une solution parcimonieuse par la minimisation de la norme ℓ_0 sur le signal recherché. Le critère devient : $\mathcal{H}(\mathbf{v}_t) = \|\mathbf{v}_t\|_0$, optimisé sous c_1 et, facultativement, sous c_2 . Puisque le problème ℓ_0 est NP-dur, nous recourons aux approches sous-optimales afin de le résoudre. Ceci peut se faire en approximant le problème initial, non-convexe, par la norme ℓ_1 (Petra et al. [2008]) et en utilisant des programmes linéaires classiques pour le résoudre tel le Basis Pursuit (BP) (Chen et al. [1998]). Une autre approche consiste à employer des approches heuristiques afin d'accéder à la solution (Barbu et al. [2011]). Donner une représentation parcimonieuse au signal TomoPIV semble particulièrement approprié dans le contexte de TomoPIV lorsque l'on cherche à estimer les densités volumiques aux centres des particules \mathbf{v}_t , signal plus épars que le vecteur habituellement reconstruit dans la littérature \mathbf{x}_t .

3.2. Estimation du flot scénique

L'estimation du mouvement pour la TomoPIV se fait, de manière quasi-uniforme dans la littérature, en appliquant des traitements a posteriori à deux distributions consécutives volumiques, précédemment estimées, afin d'accéder au champ de déplacements qui les relie (Scarano et Riethmuller [2000]). Nous nous plaçons dans le même paradigme de reconstruction et faisons appel à une procédure locale établie par (Lucas et Kanade

[1981]) que nous étendons au traitement de données 3D. Cette dernière se base sur l'hypothèse que le déplacement $u_t(\mathbf{k})$ satisfait la contrainte de conservation de l'énergie sur un petit voisinage autour de \mathbf{k} . Nous dénotons par $\mathbf{x}_t^* = \mathbf{G}\mathbf{v}_t^*(\mathbf{k})$ la densité volumique reconstruite à l'instant t et par $\mathbf{x}_t^*(\mathbf{k})$ le vecteur qui collecte les éléments de \mathbf{x}_t^* autour de \mathbf{k} . Nous cherchons le déplacement $u_t(\mathbf{k})$ qui minimise le critère suivant :

$$\min_{u_t(\mathbf{k})} \|\mathbf{x}_t^*(\mathbf{k}) - I(u_t(\mathbf{k}))\mathbf{x}_{t+1}^*(\mathbf{k})\|_2^2, \quad (10)$$

où $I(u_t(\mathbf{k}))\mathbf{x}_{t+1}^*$ est une matrice d'interpolation. Nous accédons à la solution du (10) par une procédure itérative de descente de gradient.

4. Estimation jointe

Même si au niveau conceptuel l'estimation séquentielle est intéressante, elle souffre de certaines faiblesses. De manière plus réaliste, la distribution volumique au cours de la séquence temporelle peut être modélisée comme une entité déformée par le mouvement du fluide. Dès lors, l'estimation indépendante des deux quantités ne respecte pas la vérité physique du système. En outre, les imprécisions sur le modèle (qui peuvent être dues à une calibration inexacte, au faible nombre d'observations) ne sont pas prises en compte dans les méthodes actuelles. La netteté des champs de vitesse reconstruits peut être améliorée par leur intégration dans les algorithmes d'estimation.

Récemment, (Novara et al. [2010]) ont proposé une approche qui respecte la structure jointe des volumes et des vitesses. En effet, les auteurs mettent en place une heuristique dans le but d'initialiser l'algorithme MART avec une quantité prenant en compte deux vues successives de la scène. Cette technique accélère la reconstruction et affine la précision de la reconstruction.

Nous formalisons, dans le même esprit d'estimation jointe, un critère global qui exprime la connexion entre les densités volumiques instantanées consécutives et les vitesses qui les rattachent. Considérons une séquence de $T + 1, \forall T \in \mathbb{N}^*$ cadres successifs de la scène 3D. Notons par $X(\mathbf{k}) = \{\mathbf{x}_0(\mathbf{k}), \dots, \mathbf{x}_T(\mathbf{k})\}$ l'ensemble de variables collectant les éléments des vecteurs de densités volumiques à réestimer \mathbf{x}_t autour de $\mathbf{k} \in \mathcal{V}, \forall t \in \{0, \dots, T\}$ et $U(\mathbf{k}) = \{u_0(\mathbf{k}), \dots, u_{T-1}(\mathbf{k})\}$ l'ensembles de vecteurs de déplacement qui les relient d'un cadre au suivant. Nous nous intéressons au problème d'optimisation suivant :

$$\min_{U(\mathbf{k}), X(\mathbf{k})} \mathcal{F}(U(\mathbf{k}), X(\mathbf{k})), \text{ où} \quad (11)$$

$$\mathcal{F}(U(\mathbf{k}), X(\mathbf{k})) = \frac{\|\mathbf{x}_0(\mathbf{k}) - \mathbf{x}_0^*(\mathbf{k})\|_2^2}{\sigma_0^2} + \sum_{t=1}^T \left[\frac{\|\mathbf{x}_t(\mathbf{k}) - \mathbf{x}_t^*(\mathbf{k})\|_2^2}{\sigma_t^2} + \frac{\|\mathbf{x}_{t-1}(\mathbf{k}) - I(u_{t-1}(\mathbf{k}))\mathbf{x}_t(\mathbf{k})\|_2^2}{\sigma_{e_t}^2} \right]. \quad (12)$$

Les termes spatiaux pénalisent les discrédances qui existent entre les quantités $\mathbf{x}_t(\mathbf{k})$ et les volumes reconstruits $\mathbf{x}_t^*(\mathbf{k})$. Les termes d'attache aux données renforcent la contrainte de conservation de densité spatiale (7).

Nous accédons aux solutions de (11) suite à une séquence de minimisations sujettes à la paire des ensembles $U(\mathbf{k})$ et $X(\mathbf{k})$:

$$(U(\mathbf{k})^{(l+1)}, X(\mathbf{k})^{(l+1)}) = \arg \min_{U(\mathbf{k}), X(\mathbf{k})} \mathcal{F}(U(\mathbf{k})^l, X(\mathbf{k})^l), \quad (13)$$

où l désigne le numéro d'itération. Nous cherchons les minimums de (13) par une descente de gradient en évaluant les expressions des dérivées partielles de $\mathcal{F}(U(\mathbf{k}), X(\mathbf{k}))$ sujette aux ensembles $U(\mathbf{k})$ et $X(\mathbf{k})$. Les lecteurs peuvent se référer à (Barbu et al. [2013]) pour les expression analytiques de ces dérivées.

5. Evaluation numérique

Nous considérons un cuboïde discrétisé dans une grille cartésienne de $61 \times 61 \times 31$ voxels, dont l'unité de voxel est établie à 1 (adimensionnel). Nous obtenons, à partir d'un système de 4 caméras et après la calibration de ce dernier, le dictionnaire d'encodage \mathbf{D} : 20164×34225 et le dictionnaire de décodage \mathbf{B} : 34225×273800 , pour $p = 2$. Nous ensemençons le volume avec une densité par pixel égale à 0.01. Nous simulons ensuite un écoulement de cisaillement dans la direction de l'axe Y du repère monde. Nous résolvons (9) pour chaque volume de la séquence simulé, d'abord en lui appliquant la procédure de BP couplé avec des contraintes de non-négativité, ensuite avec l'algorithme MART. Nous minimisons (10) et (11) pour chacune de ces distributions estimées. Nous quantifions les performances en terme d'erreur quadratique moyenne de déplacement calculée grâce à la connaissance de la vérité terrain, sachant que la norme maximale des champs de déplacement se situe aux alentours de la valeur 1.43. La Figure 1 montre les résultats obtenus pour une sous-grille du volume considéré, à une valeur de profondeur fixée.

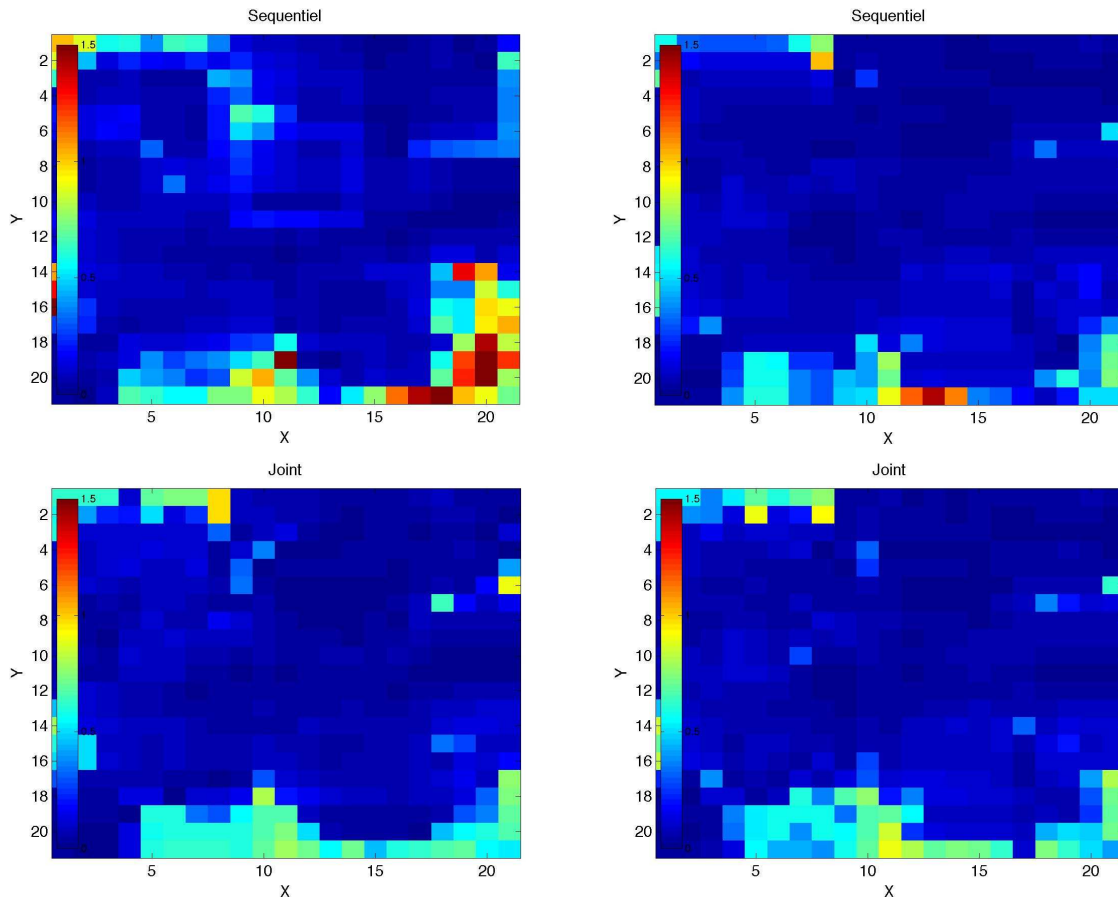


Fig. 1: Performances en terme d'erreur quadratique moyenne de déplacement; sur la gauche, de haut en bas, l'estimation séquentielle, ensuite jointe pour un volume initialement reconstruit avec BP soumis à c_1 et c_2 . De manière analogue, sur la droite, les problèmes (10) et (11) sont résolus pour la reconstruction volumique avec MART.

Pour cette configuration précise, nous remarquons que l'utilisation de l'approche jointe permet d'enlever les pics d'erreurs qui peuvent apparaître localement avec l'approche séquentielle ; cependant, elle propage, de manière légère, certaines imprécisions sur les solutions, qui restent néanmoins inférieures, surtout pour le problème parcimonieux, à celles résultantes par l'approche séquentielle. Le problème (11) semble robuste aux différentes initialisations du volume alors que le problème (10) semble moins bien estimer les champs de déplacement pour un problème de minimisation de la norme ℓ_1 sur le signal, critère pourtant plus proche de l'anatomie de la scène. Toutefois, une étude comparative dans un scénario expérimental est nécessaire afin d'établir, de manière quantitative dans un milieu réaliste, l'intérêt de chacune des méthodes.

6. Conclusions

Une nouvelle formulation du problème joint inhérent à la Tomographie PIV a été proposée. Nous avons décrit la formalisation théorique de cette dernière pour l'estimation et le suivi des **centres** des particules du fluide, contrairement à l'approche décrite dans (Barbu et al. [2013]), qui présente une démarche par **blobs**. Une première étude qualitative nous a permis de constater, dans un cas typique de TomoPIV, certains apports par rapport au paradigme séquentiel classique utilisé dans la littérature. Néanmoins, des expériences plus poussées dans une scène réaliste vont nous permettre d'apprécier sa robustesse aux différents facteurs générateurs de bruit (changement d'illumination de la scène, erreurs de calibration et de mesures). Par ailleurs, la prise en compte de ces derniers constitue une piste d'amélioration de ces algorithmes d'estimation lors des futurs travaux.

Références

- Adrian, R. J., Westerweel, J., [2010] *Particle Image Velocimetry*. Cambridge University Press.
- Atkinson, C., Soria, J., [2009] *An efficient simultaneous reconstruction technique for tomographic particle image velocimetry*, Exp. Fluids, 47 553-68
- Barbu, I., Herzet, C., Mémin, E. [2011] *Représentation et algorithmes parcimonieux pour la Tomographie PIV*, Fluvisu14, Lille, France.
- Barbu, I., Herzet, C., Mémin, E. [2013] *Joint Estimation of Volume and Velocity in TomoPIV*, 13th Int. Symp. PIV, Delft, Netherlands.
- Chen S., Donoho D. L., Saunders M. A., [1998] *Atomic Decomposition by Basis Pursuit*, SIAM Journal on Scientific Computing, 20(1):33–61.
- Elsinga G., Scarano F., Wieneke B., van Oudheusden B., [2006] *Tomographic particle image velocimetry*, Exp. Fluids, 41(6):933–947.
- Elsinga, G., Wieneke B., Scarano F., Novara, M, [2010]. *On the velocity of ghost particles and the bias errors in tomographic-PIV*. Exp. Fluids, 50 :825-38.
- Elsinga, G, [2013]. *Complete removal of ghost particles*. 13th Int. Symp. PIV, Delft, Netherlands.
- Lucas, B.D., Kanade, T. [1981] *An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision*, in Proc. Imaging Understanding Workshop.

Novara, M., Scarano, F. [2010] *Performances of motion tracking enhanced tomo-PIV on turbulent shear flow*, Exp. Fluids 52 1027-41

Novara, M., Batenburg, K.J., Scarano, F., [2010] Motion tracking-enhanced MART for tomographic PIV, Meas. Sci. Technol., vol 21

Petra S., Schröder A., Wieneke B., Schnörr C., [2008] *On Sparsity Maximization in Tomographic Particle Image Reconstruction*. In Proceedings of the 30th DAGM symposium on Pattern Recognition, pages 294–303, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.

Scarano, F., Riethmuller, M.L. [2000] *Advances in iterative multigrid PIV image processing*. Exp. Fluids, 29 :51-60.

Thomas L., Tremblais B., David L., [2010] *Influence des paramètres de reconstruction sur la qualité des résultats de tomo-PIV*. In Congrès Francophone de Techniques Laser, CTFL, Vandoeuvre-lès-Nancy (14-17 septembre).

Wieneke, B., [2008] *Volume self-calibration for 3D particle image distribution*, 9th Int. Symp. PIV, Kobe, Japan.

Worth, A., Nickels T.B., [2008] *Acceleration of tomo-PIV by estimating the initial volume intensity distribution*, Exp. Fluids 45 847-56